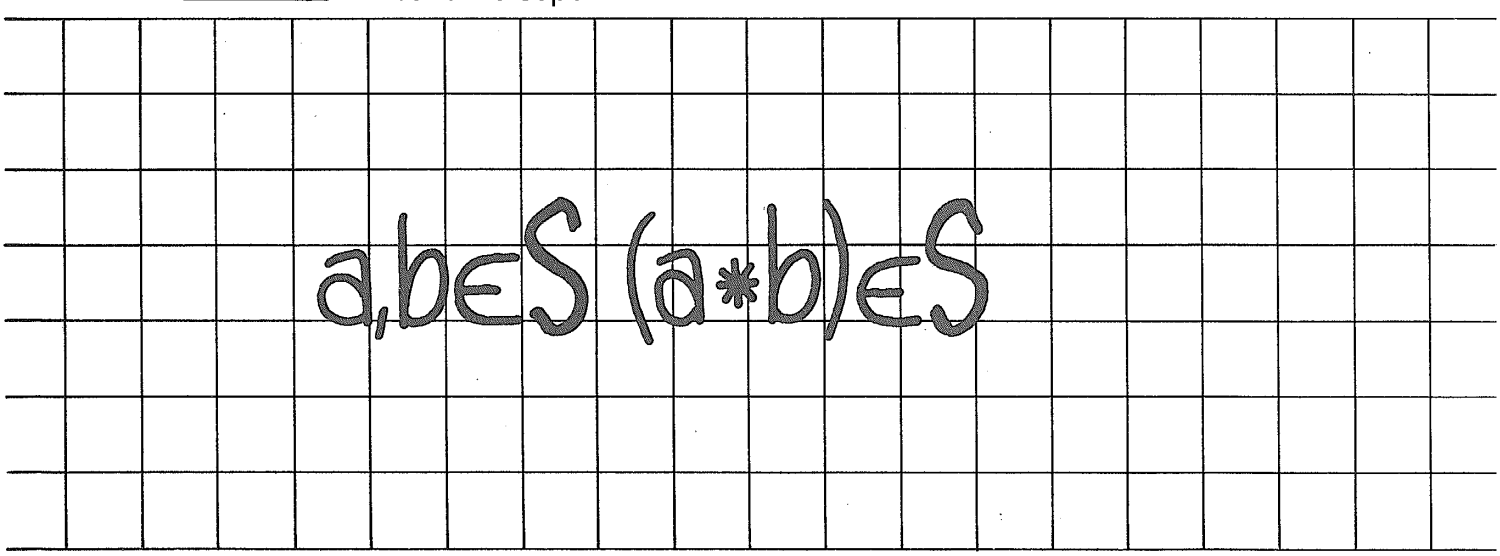
ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. El conjunto de los enteros
4. Operaciones con enteros
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división
8. Operaciones con polinomios 2. Productos notables
9. Operaciones con polinomios 3. Factorización
10. El conjunto de los racionales
11. Operaciones con expresiones racionales
12. El conjunto de los reales
13. Operaciones con expresiones reales
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 1

Álgebra. Estructuras y operaciones

Módulo 2

ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1502-0

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

2.1 Tres propiedades de operaciones con conjuntos 9

2.2 Seis propiedades de las operaciones binarias 23

2.3 Estructuras con una ley de composición interna 44

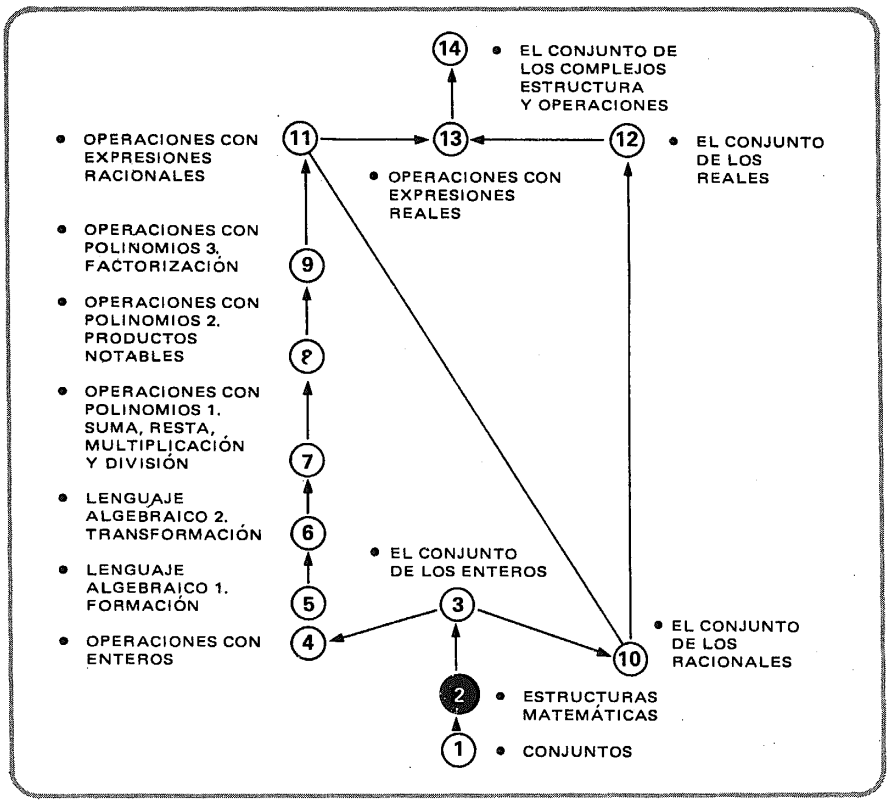
2.4 Estructuras con dos leyes de composición interna 56

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

Objetivos: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias fundamentales y las operaciones monarias de potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

Esquema estructural del bloque 1



Módulo 2. Estructuras matemáticas

Objetivos: caracterizar una estructura matemática dada, con una o dos leyes de composición interna

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética: suma, resta, multiplicación y división	—	—
• Nociones de la teoría de conjuntos (representación simbólica y operaciones de intersección, unión, diferencia y suma anillo)	1	1

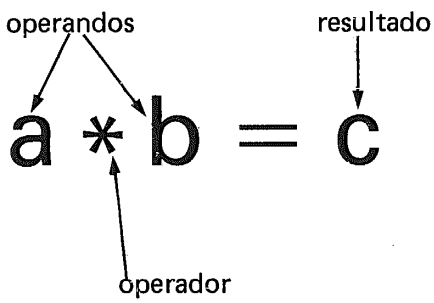
2.1

Tres propiedades de las operaciones con conjuntos

1

Éste es el esquema representativo de una

operación binaria



Hemos estudiado algunas

operaciones binarias

en que los operandos son **conjuntos:**

- intersección $A \cap B = C$
- unión $A \cup B = C$
- diferencia $A - B = C$
- diferencia simétrica o suma anillo $A \oplus B = C$

3

Recordemos la **intersección de conjuntos**

Si

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$

y

$B = \{a, e, i, o, u\}$

$A \cap B =$ [ ]

{a, e}

4

$A = \{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}$

$B = \{\spadesuit, \spadesuit, \clubsuit, \blacklozenge\}$

$A \cap B =$ [ ]

ϕ

5

Cuando $A \cap B = \phi$

A y B se denominan

conjuntos [ ]

ajenos o disjuntos

6

Recordemos la **unión de conjuntos**

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$

$B = \{a, e, i, o, u\}$

$A \cup B =$ ____

$\{a, b, c, d, e, f, i, o, u\}$

7

A {■, ●, ▲}

$B = \{$ ♠ , ♠, ♣ , ◆ $\}$

$A \cup B =$ ____

{■, ●, ▲, ♠ , ♠ , ♣ , ◆}

8

Recordemos la **diferencia de conjuntos**

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$

$B = \{a, e, i, o, u\}$

$A - B =$ ____

{b, c, d, f}

9

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$

$B = \{a, e, i, o, u\}$

$B - A =$ ⌊_____⌋

$\{i, o, u\}$

10

$A = \{■, ●, ▲\}$

$B = \{♠, ♠, ♣, ♦\}$

$A - B =$ ⌊_____⌋

$B - A =$ ⌊_____⌋

$\{■, ●, ▲\}$

$\{♠, ♠, ♣, ♦\}$

11

Recordemos la **diferencia simétrica** o **suma anillo de conjuntos.**

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$

$B = \{a, e, i, o, u\}$

$A \oplus B =$ ⌊_____⌋

$\{b, c, d, f, i, o, u\}$

12

$A = \{\blacksquare, \blacktriangle, \bullet\}$

$B = \{\spadesuit, \spadesuit, \clubsuit, \blacklozenge\}$

$A \oplus B =$ ⌊_____⌋

$\{\spadesuit, \clubsuit, \blacklozenge, \spadesuit\}$

1.2.1.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

13

Ahora bien, tenemos
dos conjuntos:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}.$

Demos su intersección:

$A \cap B =$ ⌊____⌋

$\{3, 4\}$

14

Sean los
mismos conjuntos

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

pero, ahora queremos:

$B \cap A =$ [ ]

{3, 4}

15

¿Podríamos afirmar intuitivamente que,
para todos los casos,

$A \cap B = B \cap A$?

Sí/No

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Sí:

$A \cap B = B \cap A$

A esto se le conoce con el nombre de

propiedad conmutativa

de la intersección de dos conjuntos.

16

Ahora bien,
¿se cumple la propiedad conmutativa para la unión de conjuntos?
Dicho de otra manera:

$$A \cup B = B \cup A$$

¿es verdadera para todo par de conjuntos A y B? **Sí/No**

Ayudémonos con diagramas de Venn-Euler y con la revisión de algunos casos particulares.

Sí

17

Señalar la opción correcta.

Para la **diferencia** de conjuntos, también se cumple la propiedad conmutativa, es decir, que:

$$A - B = B - A$$

V/F

F

18

Hemos visto que, en general:

$$A - B \neq B - A$$

19

Señalar la opción correcta.

Para la **diferencia simétrica** o **suma anillo de conjuntos,**

se cumple la propiedad conmutativa, es decir, que:

$$A \oplus B = B \oplus A$$

V/F

V

20

En general:

$$A \oplus B = B \oplus A$$

21

A manera de resumen presentamos el siguiente cuadro.

Operación binaria	*¿Se cumple la propiedad conmutativa?*	*Expresión representativa*
Intersección de dos conjuntos	Sí	$A \cap B = B \cap A$
Unión de dos conjuntos	Sí	$A \cup B = B \cup A$
Diferencia de dos conjuntos	No	
Diferencia simétrica o suma anillo	Sí	$A \oplus B = B \oplus A$

22

Sean, ahora, tres conjuntos

$A = \{3, 4, 6\}$

$B = \{5, 6, 7\}$

$C = \{2, 4, 6, 8\}$

$\underbrace{(A \cap B)} \cap C = \square$

efectuar en primer lugar

{6}

23

Sean los mismos conjuntos

$A = \{3, 4, 6\}$

$B = \{5, 6, 7\}$

$C = \{2, 4, 6, 8\}$

$A \cap \underbrace{(B \cap C)} =$

efectuar primero

{6}

24

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Esta expresión representa otra propiedad que se conoce con el nombre de:

propiedad asociativa

de la intersección de conjuntos.

25

Puesto que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

podemos escribir:

$$A \cap B \cap C$$

26

Completemos el siguiente cuadro, relativo a la propiedad asociativa de las operaciones con conjuntos.

Operación	*¿Se cumple la propiedad asociativa?*	*Expresión representativa*
Intersección de conjuntos		
Unión de conjuntos		
Diferencia de conjuntos		
Diferencia simétrica o suma anillo		

Respuesta en el cuadro siguiente.

Operación	*¿Se cumple la propiedad asociativa?*	*Expresión representativa*
Intersección de conjuntos	Sí	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Unión de conjuntos	Sí	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Diferencia de conjuntos	No	
Diferencia simétrica o suma anillo	Sí	$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

27

Ahora bien, sean los conjuntos:

$A = \{3, 4, 5, 6\}$

$B = \{5, 6, 7\}$

$C = \{2, 4, 6, 8\}$

Entonces, por la propiedad asociativa, tenemos que:

$(A \cap B) \cup C =$ [ ]

$\{2, 4, 5, 6, 8\}$

28

Sean los mismos conjuntos:

$A = \{3, 4, 5, 6\}$

$B = \{5, 6, 7\}$

$C = \{2, 4, 6, 8\}$

Por la propiedad asociativa:

$A \cup C =$ [ ]

$\{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$B \cup C =$ [ ]

$\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$(A \cup C) \cap (B \cup C) =$ [ ]

$\{2, 4, 5, 6, 8\}$

29

Así, nos damos cuenta de que, por lo menos para este caso particular:

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

30

Mediante la **verificación de algunos casos particulares**
y con la ayuda de diagramas de Venn-Euler
podemos llegar a la conclusión de
que esta **propiedad** se cumple para toda **tercia** de conjuntos.

Esto nos bastará por el momento;
sin embargo,
debemos tener en cuenta que,
en Matemática,

se requiere una demostración

más rigurosa acerca de la verdad
o falsedad de una proporción.

31

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Esta expresión representa la

propiedad distributiva

de la unión de conjuntos
con respecto a la intersección de
conjuntos.

32

Ahora bien,

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

¿es verdadera o falsa?

verdadera

33

Por lo tanto, la expresión

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

representa la

propiedad distributiva

de la intersección de conjuntos
con respecto a la unión de conjuntos.

34

Estudiemos con atención esta tabla* de la propiedad distributiva, y verifiquemos cada uno de los casos, si se considera necesario.

con respecto a ↓ / De →	$\cap$	$\cup$	$-$	$\oplus$
$\cap$		1	1	1
$\cup$	1		0	0
$-$	1	1		1
$\oplus$	0	0	0	

* Hemos indicado con 1 las propiedades que se cumplen con 0 las que no se cumplen.

35

Enumeremos las tres
propiedades estudiadas hasta este momento:

1. **Conmutatividad**
2. **Asociatividad**
3. **Distributividad**

1.2.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar,* mediante la verificación de casos particulares o por medio de diagramas de Venn, si se cumple o no alguna de las tres propiedades:

  — conmutatividad,
  — asociatividad,
  — distributividad,

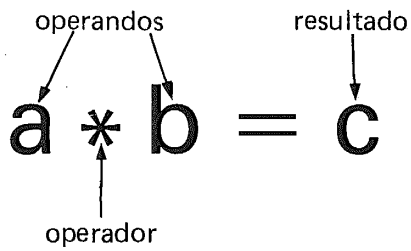
  para una operación conjuntista dada.

2.2

Seis propiedades de las operaciones binarias

36

Recordemos brevemente el concepto de **operación binaria**.



37

Ya hemos estudiado algunas

operaciones binarias

en que los **operandos**

son

conjuntos.

38

Los

elementos

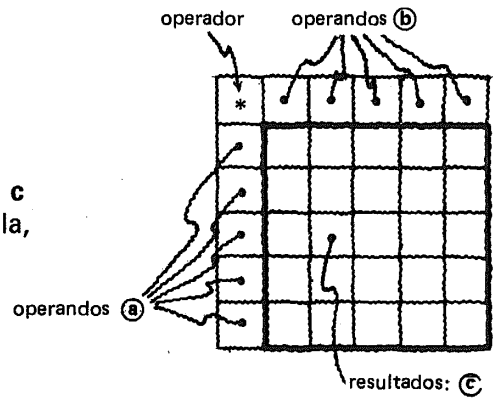
de un conjunto dado,
también pueden ser

operandos.

39

Podemos representar
la operación **a * b = c**
por medio de una tabla,
que llamaremos

tabla binaria



40

Un ejemplo familiar de tabla binaria.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	48	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

41

Debemos
familiarizarnos
con el
funcionamiento
de la
tabla binaria.

42

Consideremos, ahora, el conjunto

$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

cuya cardinalidad es ⌊____⌋

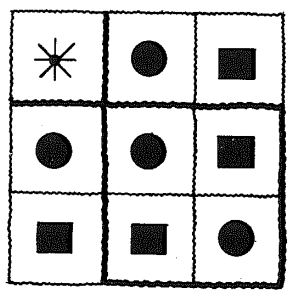
2

43

Consideremos, también, la

operación binaria $*$

representada por medio
de la siguiente tabla.



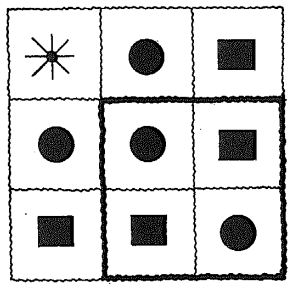
44

Después de haber observado la tabla, podemos escribir:

● * ● = ●

que leemos:

≪ **Círculo estrella círculo es igual a círculo** ≫

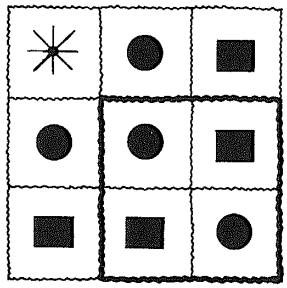


S = {●, ■}

45

En forma similar podemos escribir:

a * b = c



S = {●, ■}

● * ■ = ■

■ * ● = ■

■ * ■ = ●

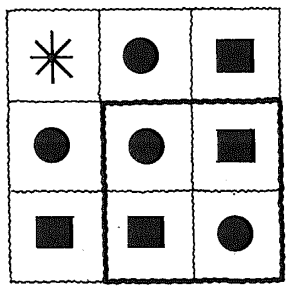
(en cualquier orden)

46

Ahora bien, la operación * ¿es **conmutativa** para el conjunto S?

Sí/No

a * b = c



S = {●, ■}

Sí

puesto que:

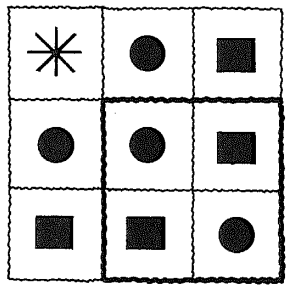
● * ■ = ■ * ● = ■

47

La operación $*$
¿es **asociativa**
para el conjunto S?

Sí/No

$a * b = c$



$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

Sí
puesto que:

$(\bullet * \blacksquare) * \bullet = \blacksquare * \bullet = \blacksquare$

$\bullet * (\blacksquare * \bullet) = \blacksquare * \bullet = \blacksquare$

etc.

48

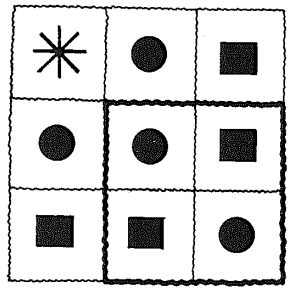
No podemos hablar de

distributividad,

puesto que hemos
definido sólo una

operación.

$a * b = c$

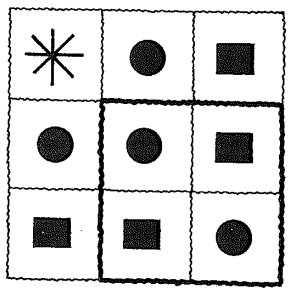


$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

49

Estudiemos otras
propiedades
interesantes
en relación con la
operación $*$
en el conjunto S.

$a * b = c$



$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

50

Observemos que
el resultado (c)
de la operación $*$

siempre es

un elemento del
conjunto S.

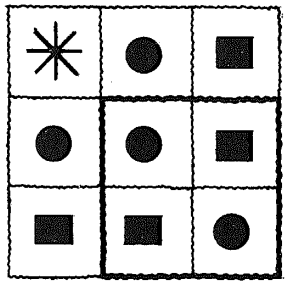
Simbólicamente:

$a \in S$

$b \in S$

$c \in S$

$a * b = c$



$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

51

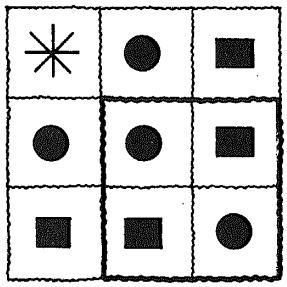
A esta propiedad
se le llama

clausura

o

cerradura.

$a * b = c$

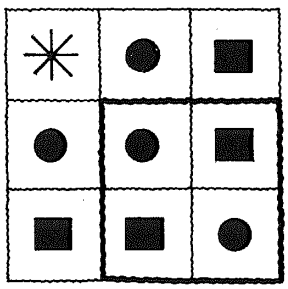


$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

52

Decimos que:
la operación $*$
es cerrada
para el conjunto S
o que:
el conjunto S
es cerrado
para la operación $*$

$a * b = c$



$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

53

Esto **no ocurre siempre.**

Tenemos, por ejemplo, el conjunto

$$R = \{0, 1, 2\}$$

y la operación $\times$ (multiplicación)

$a \cdot b = c$

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	④

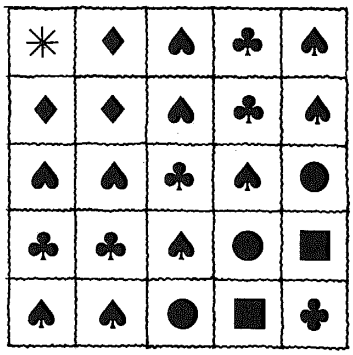
$4 \notin R$

54

$T = \{\blacklozenge, \spadesuit, \clubsuit, \spadesuit\}$

La operación indicada, ¿es cerrada?

Sí/No



No

55

$U = \{0, 1, 2, 3\}$

La operación indicada, ¿es cerrada?

Sí/No

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

No

56

$V = \{0, 1\}$

La operación indicada,
¿es cerrada?
Sí/No

X	0	1
0	0	0
1	0	1

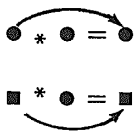
Sí

57

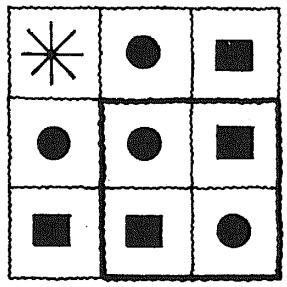
En nuestro conjunto S
de referencia
el elemento ● se llama,

elemento neutro o de identidad,

Observemos que:



a * b = c



S = {●, ■}

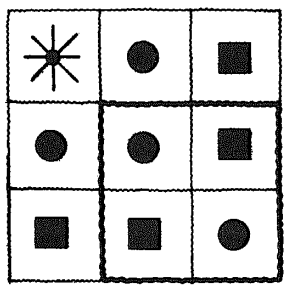
58

Decimos que:
la operación *
tiene

elemento neutro o
de identidad

en el
conjunto S.
Tal elemento
es ●.

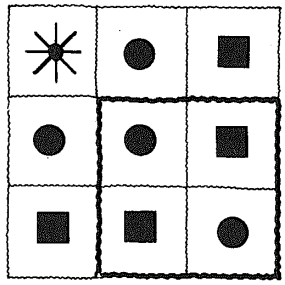
a * b = c



S = {●, ■}

59

$a * b = c$



$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

También
podemos decir que:
●
es el **elemento neutro**
o

de identidad

para la operación $*$
en el conjunto S.

60

La operación X
¿tiene

elemento de identidad

o

elemento neutro

en el conjunto R?

X	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

$R = \{0, 1, 2\}$

Sí/No

Sí
Tal elemento es el 1

61

Al elemento

neutro o de identidad

lo simbolizaremos con e.

En el último ejemplo
considerado:

$e = 1$

62

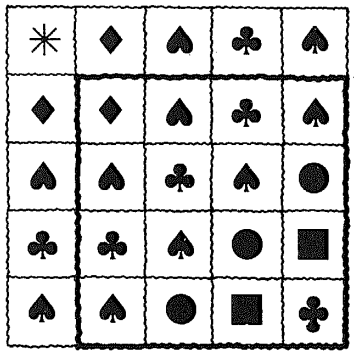
La operación $*$, ¿tiene

elemento neutro o **de identidad**

en el conjunto T?

Sí/No

Indicar cuál es, en caso de que éste exista.



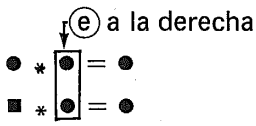
$T = \{\blacklozenge, \spadesuit, \clubsuit, \spadesuit\}$

Sí

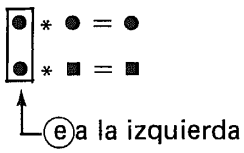
$e = \blacklozenge$

63

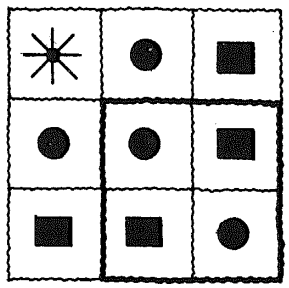
Al hacer más rigurosa la observación de nuestro conjunto de referencia, vemos que:



pero también:



$a * b = c$



$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

64

Decimos que:

$\bullet$

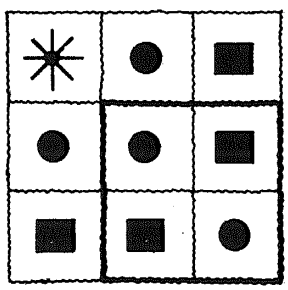
es el **elemento neutro** o **de identidad** **a la derecha**

y

a la izquierda

para la operación $*$ en el conjunto S.

$a * b = c$



$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

65

¿Existe **elemento de identidad** o **elemento neutro**-a la derecha, a la izquierda, o en ambas posiciones-para la operación indicada?

Sí/No

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

$U = \{0, 1, 2, 3\}$

Sí

$e_{der} = e_{izq} = 0$

66

- e_{izq} = _____
- e_{der} = _____

X	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

$R = \{0, 1, 2\}$

$e_{izq} = e_{der} = 1$

67

- e_{izq} = _____
- e_{der} = _____

X	0	1
0	0	0
1	0	1

$V = \{0, 1\}$

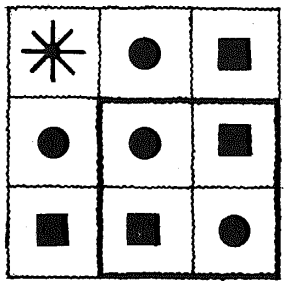
$e_{izq} = e_{der} = 1$

68

Continuemos nuestras observaciones acerca del conjunto S, para el cual hemos encontrado que:

$e_{izq} = e_{der} = \bullet$

$a * b = c$



$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

69

Vemos que:

$a * b = c$

$\bullet * \bullet = \bullet$

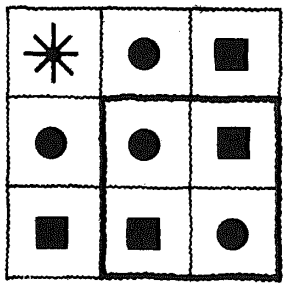
$\blacksquare * \blacksquare = \bullet$

elemento neutro o de identidad

Decimos que:

- $\bullet$ es el elemento **inverso** de $\bullet$
- $\blacksquare$ es el elemento **inverso** de $\blacksquare$

$a * b = c$



$\{S = \bullet, \blacksquare\}$

70

Entonces, para la operación $*$ en el conjunto S:

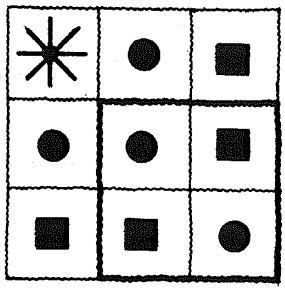
Todo **elemento** a tiene su

elemento inverso a'

tal que

$a' * a = e$

$a * b = c$



$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

71

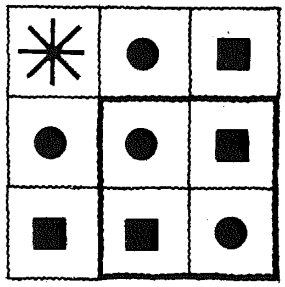
$a * b = c$

Si

$$a * a' = a' * a = e$$

entonces

a' es **elemento inverso,**
a la derecha y a la **izquierda,**
de a .



$S = \{\bullet, \blacksquare\}$

72

Investigar
si cada
elemento de R
tiene su

inverso

y si funciona a la
izquierda, a la
derecha, o en ambas
posiciones.

X	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

$R = \{0, 1, 2\}$ $\boxed{e = 1}$

Ver cuadro siguiente

73

$0 \times ? = 1$
$? \times 0 = 1$ → 0 **no** tiene inverso

$1 \times ? = 1$
$1 \times 1 = 1$
$? \times 1 = 1$
$1 \times 1 = 1$ → 1 **sí** tiene inverso, que es 1

$2 \times ? = 1$
$? \times 2 = 1$ → 2 **no** tiene inverso

X	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

74

Investigar si
cada elemento de U
tiene elemento inverso,
y si funciona a la derecha,
a la izquierda, o en ambas
posiciones.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

$U = \{0, 1, 2, 3\}$ $\boxed{e = 0}$

El 0 (cero)
es el único
elemento de U que
tiene elemento
inverso, que es el
mismo 0 (cero).

$0 + 0 = 0$

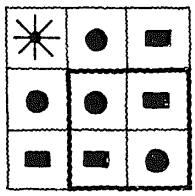
75

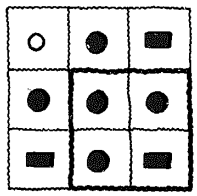
Ahora, definamos

otra operación binaria

en el conjunto S,
y designémosla con un
círculo pequeño: ○

a * b = c





a ○ b = c

76

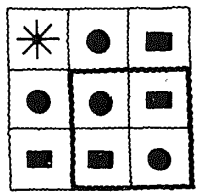
La operación ○
¿es distributiva con respecto
a la operación *
en el conjunto S?
Expresado de otra manera:

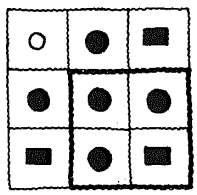
(a * b) ○ c = (a ○ c) * (b ○ c)

para toda a, b, c ∈ S.

V | F

a * b = c



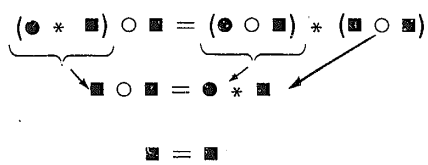


a ○ b = c

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Ejemplo de verificación:

$$(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$$



77

Resumen de propiedades.

Para una operación (*)

1. Cerradura
2. Asociatividad
3. Existencia de elemento neutro o de identidad
4. Existencia de elementos inversos
5. Conmutatividad

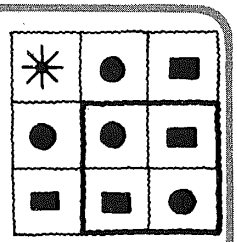
Para dos operaciones (*, ○)

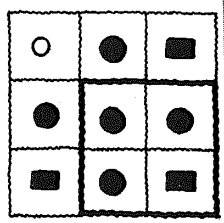
6. Distributividad

78

Para el conjunto S ¿Se cumple?

● Para la operación *	■
1. Cerradura	
2. Asociatividad	
3. Existencia de elemento neutro o de identidad	
4. Existencia de elementos inversos para todos los elementos	
5. Conmutatividad	
● Para las operaciones (*, ○)	■
6. Distributividad ○/*	





Respuesta en el cuadro siguiente

Para el conjunto S ¿Se cumple?

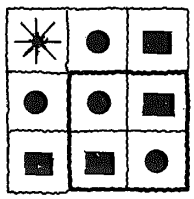
● Para la operación *	
1, Cerradura	Sí
2. Asociatividad	Sí
3. Existencia de elemento neutro o de identidad*	Sí
4. Existencia de elementos inversos para todo elemento	Sí
5. Conmutatividad	Sí
● Para las operaciones (*, ○)	
6. Distributividad ○/*	Sí

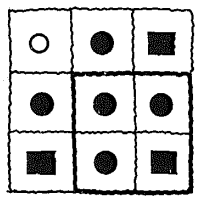
* El elemento neutro es ●

79

Para el conjunto S ¿Se cumple?

● Para la operación ○	
1. Cerradura	
2. Asociatividad	
3. Existencia de elemento neutro o de identidad	
4. Existencia de elementos inversos para todo elemento	
5. Conmutatividad	
● Para las operaciones (*, ○)	
6. Distributividad */○	





Respuesta en el cuadro siguiente

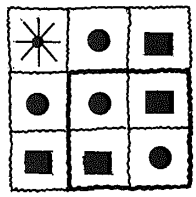
Para el conjunto S ¿Se cumple?

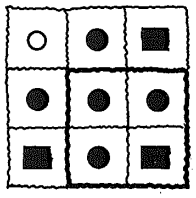
● Para la operación ○	
1. Cerradura	Sí
2. Asociatividad	Sí
3. Existencia de elemento neutro o de identidad*	Sí
4. Existencia de elemento inverso para todo elemento	No
5. Conmutatividad	Sí
● Para las operaciones (*, ○)	
6. Distributividad */○	No

* El elemento neutro es ■

80

Veremos, ahora, algunas interpretaciones de estas dos operaciones binarias.



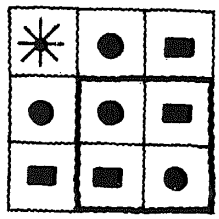


81

La conocida regla de los signos para la multiplicación de números enteros.

● = +

■ = −



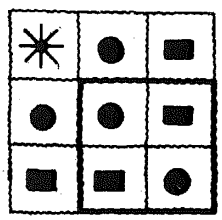
×	+	−
+	+	−
−	−	+

82

Regla para la suma de números pares y nones.

● = número par

■ = número non



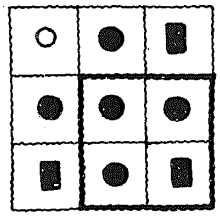
+	PAR	NON
PAR	PAR	NON
NON	NON	PAR

83

Tabla de multiplicar
en el sistema
binario de numeración.

● = 0

■ = 1



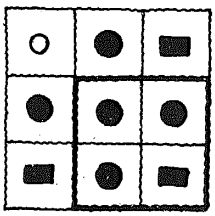
X	0	1
0	0	0
1	0	1

84

Regla para la multiplicación
de números pares y nones.

● = Par

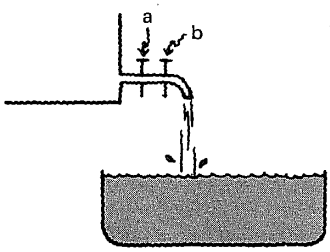
■ = Non



X	PAR	NON
PAR	PAR	PAR
NON	PAR	NON

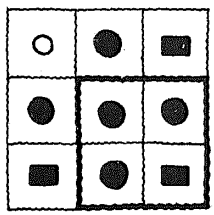
85

Par de grifos
en serie



● = 0 = cerrado = no fluye agua

■ = 1 = abierto = fluye agua

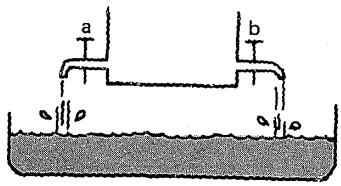


SERIE	0	1 ◀b
0	0	0
1	0	1

▲a

86

Par de grifos
en
paralelo



0 = cerrado = no fluye

1 = abierto = fluye

PARA-LELO		

b

a

Completar:

0 = cerrado = no fluye

1 = abierto = fluye

PARA-LELO	0	1
0	0	1
1	1	1

87

Consideremos estas dos
operaciones en S = {0, 1}

En paralelo

✳	0	1
0	0	1
1	1	1

a ∗ b = c

En serie

⊙	0	1
0	0	0
1	0	1

a ⊙ b = c

88

Completar.

	¿Se cumple?
● Para la operación ∗	
1. Cerradura	
2. Asociatividad	
3. Existencia de elemento neutro	
4. Existencia de inversos para todo elemento	
5. Conmutatividad	
● Para las operaciones (∗, ⊙)	
6. Distributividad ⊙/∗	
6. Distributividad ∗/⊙	

Respuesta
en el
cuadro siguiente

90

Para el conjunto S — ¿Se cumple?

● Para la operación ∗		
1. Cerradura		Sí
2. Asociatividad		Sí
3. Existencia de elemento neutro*		Sí
4. Existencia de inversos para todo elemento		No
5. Conmutatividad		Sí
● Para las operaciones (∗, ⊙)		
6. Distributividad	⊙/∗	Sí
	∗/⊙	Sí

* El elemento neutro es 0 (cero).

En paralelo

∗	0	1
0	0	1
1	1	1

a ∗ b = c

En serie

⊙	0	1
0	0	0
1	0	1

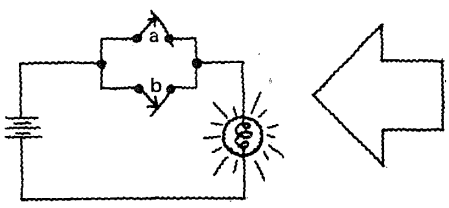
a ⊙ b = c

89

En los dos cuadros siguientes, encontraremos otras interpretaciones de las operaciones indicadas, en circuitos eléctricos.

90

Par de interruptores en paralelo



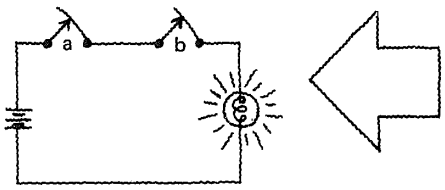
En paralelo

∗	0	1	◀b
0	0	1	
1	1	1	

▲a a ∗ b = c

91

Par de interruptores en serie.



En serie

⊙	0	1	◀b
0	0	0	
1	0	1	

▲ a ⊙ b = c
a

1.2.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar,* mediante la verificación de casos particulares y de la observación de la correspondiente tabla binaria, si se cumple o no alguna de las siguientes propiedades, para una o dos operaciones binarias definidas en un conjunto dado:

  — cerradura,
  — asociatividad,
  — existencia de elemento neutro,
  — existencia de inversos,
  — conmutatividad,
  — distributividad.

2.3

Estructuras con una ley de composición interna

92

Demos un paso más en la

formalización

de los conceptos
estudiados.

93

A una **operación binaria**
que hace corresponder a cada
par de elementos de un
conjunto dado, un tercer
elemento de ese conjunto

$a * b = c$

le llamamos también

ley de composición interna.

94

A un **conjunto** con **una o varias operaciones binarias** (o leyes de composición interna) definidas en él, le llamamos

estructura matemática.

95

Simbólicamente

$(S, *)$

representa la estructura del conjunto S para la ley de composición interna $*$.

96

Podemos hablar, por lo tanto, de estructuras con **una** ley de composición interna y de estructuras con **dos** leyes de composición interna

Simbólicamente

$(S, *)$

$(S, * \odot)$

97

Estructuras con **una** ley de composición interna.

$(S, *)$

98

Las estructuras
toman diferentes **nombres**
según cumplan todas o
algunas de las propiedades
que hemos estudiado.

99

Recordemos las propiedades estudiadas para
estructuras con una ley de composición interna:

1. Cerradura
2. Asociatividad
3. Existencia de elemento neutro
   o de identidad
4. Existencia de elementos inversos
   para todos los elementos del
   conjunto dado
5. Conmutatividad

100

1. Cerradura o clausura

Lo menos que se puede pedir
a una estructura
es que la ley de composición
interna sea **cerrada**
para el conjunto dado.

En tal caso, decimos
que la operación binaria o ley de
composición interna **está definida**
en ese conjunto.

101

Simbólicamente:

$(S, *)$ $\qquad$ $a * b = c$

si $a, b \in S$, $\qquad$ $(a * b) \in S$

Decimos que:

la operación o ley de composición interna $*$
es **cerrada** para el conjunto S

o bien, que:

el conjunto S es **cerrado** bajo la operación
o ley de composición interna $*$

102

2. Asociatividad

A la estructura para la cual
se cumple la **cerradura**
y, además, la **asociatividad,**
se le llama:

semigrupo.

103

Expresemos lo anterior simbólicamente.

$(S, *)$

$a, b, c \in S$

Se cumple:

1. Cerradura $a * b \in S$
2. Asociatividad $(a * b) * c = a * (b * c)$

} **semigrupo**

104

3. Existencia de elemento neutro o de identidad -único- a la derecha y a la izquierda

A una estructura "cerrada" y "asociativa" para la que se cumple la propiedad 3, se le llama:

monoide

105

Expresando lo anterior simbólicamente.

$(S, *)$

Se cumple: $a, b, c, x \in S$

1. Cerradura $(a * b) \in S$
2. Asociatividad $(a * b) * c = a * (b * c)$
3. Existencia de elemento neutro o de identidad $x * e = e * x = x$, $e \in S$ y es único

} **monoide**

106

4. Existencia de elemento inverso para todo elemento de S

A una estructura cerrada y "asociativa" para la que existe un elemento neutro y que, además, cumple con la propiedad 4, se le llama:

grupo

107

Expresémoslo simbólicamente.

$(S, *)$

$a, b, c, x \in S$

Se cumple:

1.	Cerradura	$a * b \in S$
2.	Asociatividad	$(a * b) * c = a * (b * c)$
3.	Existencia de elemento neutro o identidad	$x * e = e * x = x$ $e \in S$ y es único
4.	Existencia de inverso para todo elemento de S	$x * x' = x' * x = e$ $x' \in S$

→ **grupo**

108

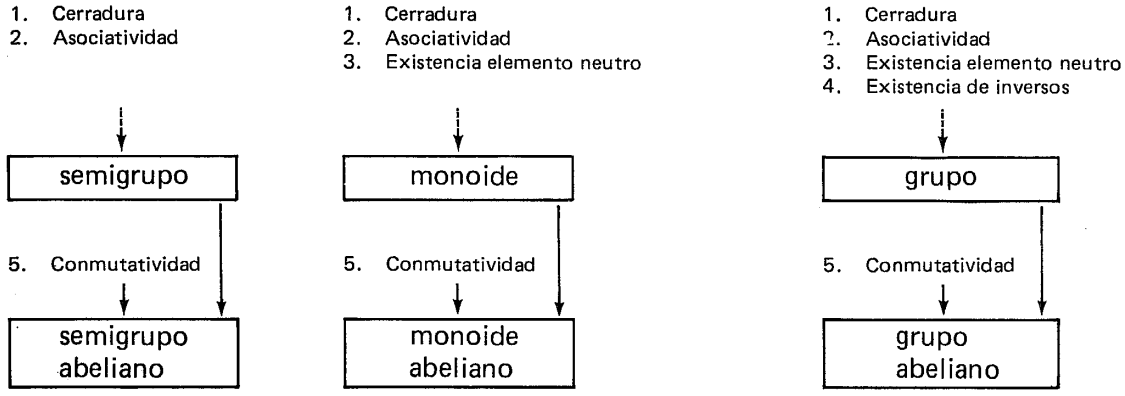
5. Conmutatividad

A cualquiera de las estructuras estudiadas, para la que se cumpla la conmutatividad, se le da el calificativo de:

abeliana

109

Resumen de las **estructuras con una ley de composición interna.**



110

Estructuras con una ley de composición interna

Cumple con la propiedad	*Nombre de la estructura*			
1. Cerradura	Semi-grupo	Monoide	Grupo	Grupo abeliano
2. Asociatividad				
3. Existencia de elemento neutro o de identidad				
4. Existencia de inversos para todo elemento de S				
5. Conmutatividad	Semigrupo abeliano	Monoide abeliano		

111

Consideremos la estructura $(S, \cup)$ (unión)

en que $S = \{\phi, A, \Omega\}$

conjunto vacío
un conjunto cualquiera
conjunto universo

112

Completar la tabla binaria, de acuerdo con lo que sabemos acerca de los conjuntos.

U	ϕ	A	Ω
ϕ			
A			
Ω			

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

113

1. Cerradura

La operación U, ¿es cerrada para el conjunto S?

Sí/No

(S, U) $S = \{\phi, A, \Omega\}$

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

Sí

114

2. Asociatividad

¿La operación U es asociativa para el conjunto S?

Sí/No

(S, U) $S = \{\phi, A, \Omega\}$

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

Sí

115

(S, U) $S = \{\phi, A, \Omega\}$

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

Esto hace que
la estructura (S, U)
sea, cuando
menos, un

[ ]

Semigrupo

116

(S, U) $S = \{\phi, A, \Omega\}$

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

3. Existencia de elemento de identidad o elemento neutro-único-

¿Se cumple?

Sí/No

Sí

En caso de existir

e = [ ]

e = ϕ

117

(S, U) $S = \{\phi, A, \Omega\}$

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

El elemento ϕ
¿es conmutativo?
es decir,
¿funciona a derecha
e izquierda?

Sí/No

Sí

118

Esto hace que
la estructura (S, U)
sea, cuando menos,
un

_____

(S, U) $S = \{\phi, A, \Omega\}$

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

monoide

119

4. Existencia de elemento inverso para todo elemento de S.

¿Se cumple?

Sí/No

(S, U) $S = \{\phi, A, \Omega\}$

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

No

El inverso de ϕ es ϕ

A carece de inverso

Ω carece de inverso

120

Por este hecho
la estructura (S, U)

no

es un

_____

(S, U) $S = \{\phi, A, \Omega\}$

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

grupo

121

(S, U) $S = \{\phi, A, \Omega\}$

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

5. Conmutatividad

¿Se cumple?

Sí/No

Sí

122

(S, U) $S = \{\phi, A, \Omega\}$

U	ϕ	A	Ω
ϕ	ϕ	A	Ω
A	A	A	Ω
Ω	Ω	Ω	Ω

En conclusión,
la estructura (S, U)
es un

_____

Monoide abeliano

1.2.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.2.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *asignar* a una estructura matemática dada con una ley de composición interna, alguno de los siguientes nombres, de acuerdo con las propiedades que cumpla:

  — semigrupo,
  — monoide,
  — grupo,
  — semigrupo abeliano,
  — monoide abeliano o,
  — grupo abeliano.

2.4

Estructuras con dos leyes de composición interna

123

Las estructuras

con dos

leyes de composición interna

se simbolizan así

$(S, * \odot)$

124

Un **grupo abeliano** para $*$ que además cumple con:

1. cerradura para $\odot$
2. asociatividad para $\odot$
6. distributividad $\odot/*$

se llama **anillo**.

125

Un **anillo**
que cumple, además, con

3. existencia de elemento neutro o de identidad para $\odot$

se llama

anillo unitario

o anillo con unidad.

126

Un **anillo unitario**
que cumple además, con

4. existencia de elemento inverso para todo elemento de S y para la ley de composición interna $\odot$

se llama

anillo con división

127

Un **anillo**
que cumple, además, con

5. conmutatividad para $\odot$

se llama

anillo conmutativo

128

Un **anillo unitario**
que cumple, además, con

5. conmutatividad para $\odot$

se llama

anillo unitario conmutativo

129

Finalmente, un

anillo con división

que cumple, además, con

5. conmutatividad para $\odot$

se llama

campo o cuerpo.

130

La estructura de

campo o **cuerpo**

cumple con

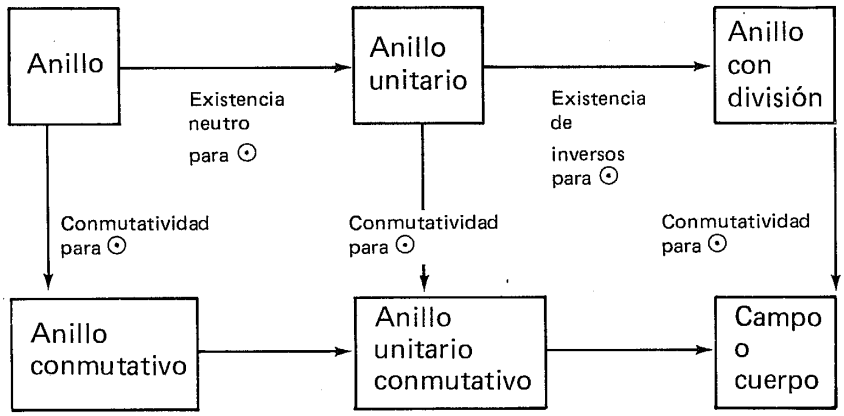
todas

las propiedades estudiadas.

131

Un **grupo abeliano** en $*$ que cumple, además, con:
cerradura para $\odot$ asociatividad para $\odot$ distributividad $\odot/*$

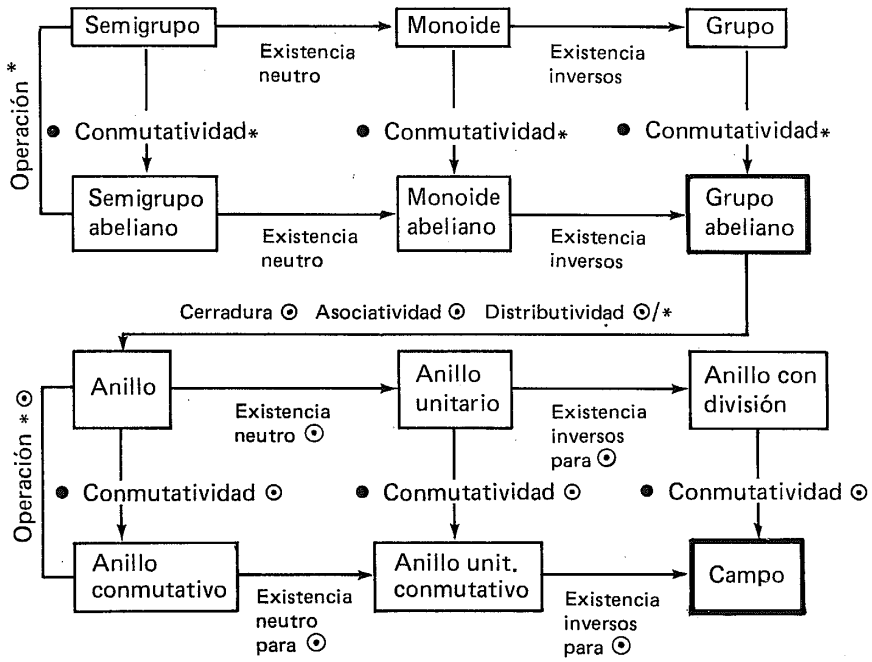
$(S, * \odot)$



132

Esquema general de las estructuras $(S, * \odot)$

- Cerradura*
- Asociatividad*



Este esquema fue adaptado de Salazar Resines, Xavier, Teoría de gráficas, *C. A. D. A.*, 1976.

133

Consideremos la estructura $(S, * \odot)$

en que $S = \{0, 1\}$

134

El alumno deberá tener a la vista el esquema general de las estructuras.

135

Las operaciones $*$ y $\odot$ quedan definidas de acuerdo con las tablas binarias mostradas.

$(S, * \odot)$

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

$S = \{0, 1\}$

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

136

Completar.

	¿Se cumple?
1. Cerradura $*$	
2. Asociatividad $*$	
3. Existencia de elemento neutro $*$	
4. Existencia de elementos inversos $*$	
5. Conmutatividad $*$	

Respuesta
en el
cuadro siguiente

1. Cerradura $*$	Sí
2. Asociatividad $*$	Sí
3. Existencia de elemento neutro $*$	Sí*
4. Existencia de elementos inversos $*$	Sí**
5. Conmutatividad $*$	Sí

* El elemento neutro es el cero.
** Cada elemento es su propio inverso.

137

La estructura $(S, *)$
es un

_____

grupo abeliano

138

Completar. ¿Se cumple?

1′. Cerradura ⊙	
2′. Asociatividad ⊙	
6. Distributividad ⊙/∗	

$(S, \ast\ \odot)$ $S=\{0,1\}$

∗	0	1
0	0	1
1	1	0

⊙	0	1
0	0	0
1	0	1

1′. Cerradura ⊙	Sí
2′. Asociatividad ⊙	Sí
6. Distributividad ⊙/∗	Sí

139

Por cumplir con las propiedades señaladas, la estructura $(S, \ast\ \odot)$ es un

[_____]

anillo

140

En la misma estructura

$(S, \ast\ \odot)$

¿existe elemento neutro ⊙?

Sí/No

En caso de que éste exista, ¿cuál es?

[_____]

$(S, \ast\ \odot)$ $S=\{0,1\}$

∗	0	1
0	0	1
1	1	0

⊙	0	1
0	0	0
1	0	1

Sí

1

141

La estructura (S, $*$ $\odot$)
es, cuando
menos, un

anillo unitario

142

¿Se cumple?

Existencia de elementos inversos $\odot$	

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

¿Se cumple?

Existencia de elementos inversos $\odot$	No

143

Atención.

El 0 no tiene inverso en $\odot$

Si nos permitimos
esta
excepción, podremos escribir:

Existencia de elementos inversos $\odot$	Sí

excepto para el elemento 0 (cero).

$(S, * \odot)$ $S = \{0, 1\}$

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

a $\odot$ b

144

La estructura (S, $*$ $\odot$)
queda catalogada,
cuando menos, como un

anillo con división

con la excepción indicada.

145

¿Se cumple?

Conmutatividad $\odot$	

$S = \{0, 1\}$

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Conmutatividad $\odot$	Sí

146

La estructura (S, $*$ $\odot$)
es,
entonces un

_____

con la excepción de que no existe
un inverso en $\odot$ para el 0.

campo o cuerpo

1.2.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.2.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *asignar* a una estructura dada con dos leyes de composición interna alguno de los nombres siguientes, de acuerdo con las propiedades que cumpla:

  — anillo,
  — anillo unitario,
  — anillo con división,
  — anillo conmutativo,
  — anillo unitario conmutativo,
  — anillo conmutativo con división,
  — campo o cuerpo.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 12 de abril de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO MEOR KC 100